Grammaires hors contexte

Exercice 1 :

Donner les langages engendrés par les grammaires suivantes :

$\left\{ \begin{array}{l} S \to 1S0 \mid 1A0 \\ A \to 0A \mid 0 \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} S \to (A) \mid a \\ A \to S \mid A, A \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} S \to acSc \mid A \\ A \to cAd \mid \epsilon \end{array} \right.$

Exercice 2 :

Pour chacun des langages suivants, donner une grammaire qui l'engendre :
- $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
- les palindromes sur $\Sigma = \{a, b, c\}$;
- le langage rationnel $(a + b)^* a(ab)^*$;
- l'ensemble des expressions bien parenthésées : $\{u \in \{(,)\}^* \mid |u|_(= |u|_) \text{ et } \forall v \text{ préfixe de } u,\ |v|_(\geq |v|_)\}$;
- l'ensemble des mots qui ont autant de a que de b : $\{u \in \{a, b\}^* \mid |u|_a = |u|_b\}$.

Exercice 3 :

Soit la grammaire $E \to x \mid E - E \mid (E)$ $\quad (x, -, (,)$ sont les symboles terminaux).
Trouver une expression qui a deux arbres de dérivation différents pour cette grammaire.
Modifier la grammaire de manière à n'autoriser que l'arbre de dérivation correspondant aux conventions mathématiques.

Même exercice avec la grammaire $E \to x \mid E + E \mid E * E \mid (E)$.

Simplification de grammaires

Exercice 4 :

Un symbole A est *productif* si il existe une dérivation $A \to^* u$, où u ne contient que des terminaux.
Un symbole A est *accessible* si il existe une dérivation $S \to^* uAv$.

Éliminer dans les grammaires suivantes les symboles non productifs puis les symboles non accessibles.

$\left\{ \begin{array}{l} S \to aA \mid bB \\ A \to Ab \mid Cc \\ B \to \epsilon \mid C \\ C \to aA \\ D \to aA \mid B \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} S \to aAB \mid aCD \\ A \to Ab \mid c \\ B \to \epsilon \mid A \\ C \to aA \mid Bb \\ D \to aD \mid Db \end{array} \right.$

Que se passe-t-il si on commence par enlever les symboles non accessibles avant de supprimer les symboles non productifs ?

Exercice 5 :

Donner une méthode pour déterminer si le langage engendré par une grammaire est vide.

Exercice 6 :

Supprimer les *ϵ-productions* ($A \to \epsilon$) dans les grammaires suivantes :

$\left\{ \begin{array}{l} S \to aAb \mid bAa \\ A \to aAb \mid bAa \mid \epsilon \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} S \to AB \\ A \to aA \mid B \mid Bc \\ B \to bA \mid \epsilon \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} S \to aABa \\ A \to aAaBb \mid \epsilon \\ B \to bBbAa \mid \epsilon \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} S \to aA \mid \epsilon \\ A \to aA \mid Sb \end{array} \right.$

(Pour les cas complexes, on pourra essayer d'abord de déterminer les non terminaux qui peuvent engendrer le mot vide ϵ.)

Exercice 7 :

Donne une méthode pour déterminer si le langage engendré par une grammaire contient le mot vide ϵ.

Exercice 8 :

Supprimer les *règles unitaires* ($A \to B$) dans les grammaires suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} S \to aS \mid A \\ A \to aA \mid bS \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} S \to AB \\ A \to B \mid aA \\ B \to A \mid bB \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} S \to a \mid A \\ A \to B \mid BC \\ B \to C \mid S \mid AB \\ C \to D \mid bC \\ D \to c \mid C \end{array}\right.$$

(Pour les cas complexes, on pourra calculer la relation d'ordre $X \to^\star Y$, et la relation d'équivalence associée.)

Exercice 9 :

Supprimer la *récursivité à gauche* ($A \to^* Au$) dans les grammaires suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} S \to aS \mid A \mid a \\ A \to AaS \mid bS \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} S \to aAa \\ A \to Aa \mid Ba \\ B \to Ac \mid dB \mid e \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} S \to A \mid S + A \mid S - A \\ A \to B \mid A * B \\ B \to a \mid (S) \end{array}\right.$$

Exercice 10 :

Mettre la grammaire suivante sous *forme normale de Greibach* ($A \to \sigma u$ où σ est un non terminal) :

$$\left\{\begin{array}{l} S \to a \mid (A) \\ A \to S \mid A, S \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} S \to A \mid S + A \\ A \to B \mid A * B \\ B \to a \mid (S) \end{array}\right.$$

Peut-on *factoriser à gauche* ces grammaires (les mettre sous la forme $A \to \sigma_1 u_1 \mid \cdots \mid \sigma_n u_n$ où les σ_i sont des terminaux *distincts*) ?

Lemme de l'étoile sur les grammaires

Soit une grammaire G qui engendre un langage *infini* $\mathcal{L}(G)$. Alors il existe un n tel que tout mot $t \in \mathcal{L}(G)$ de longueur supérieure à n ($|t| \geq n$) se décompose en $t = u\,v\,w\,x\,y$, avec $|v\,x| > 0$, $|v\,w\,x| \leq n$ et $\forall i \geq 0, u\,v^i\,w\,x^i\,y \in \mathcal{L}(G)$.

Exercice 11 :

Montrer que le langage $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas reconnaissable par une grammaire.

Exercice 12 :

Montrer que le langage $\{u \cdot u \mid u \in \Sigma^*\}$ n'est pas reconnaissable par une grammaire si $|\Sigma| > 1$.

Exercice 13 :

Montrer que le langage $\{a^n \mid n \text{ premier}\}$ n'est pas reconnaissable par une grammaire.

Exercice 14 :

Montrer que les langages $\{a^n b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ et $\{a^m b^n c^n \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ sont reconnaissables par une grammaire.
En déduire que l'ensemble des grammaires n'est pas clos par intersection, ni par complémentation.